XI SNHM
Sociedade Brasileira de História da Matemática - SBHMat
XI Seminário Nacional de História da Matemática
ISSN: 2236 - 4102

CO 23: *Arithmetica Infinitorum* de Wallis: Cume da Trajetória Histórica do Infinitesimal

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
gabriela@ccet.ufrn.br

Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
iamendes1@gmail.com

Resumo

Neste artigo discutimos o impacto do trabalho do inglês John Wallis (1616-1703) no surgimento e na consolidação do Cálculo Infinitesimal e da Análise Matemática. Apresentamos em que contexto surge sua obra prima *Arithmetica Infinitorum*, de 1656, e a sua enorme influência sobre o desenvolver da matemática da segunda metade do século XVII, não só para os ingleses como para comunidade matemática em geral. Começamos relatando, em busca das origens do “Infinitesimal”, como os filósofos gregos e jônicos que buscavam fundamentos para a matemática se deparavam com os dilemas impostos pelo infinito e o infinitesimal. Demócrito (460-370 a. C.), por exemplo, tinha a ideia de que um sólido composto de seções planas paralelas à base o levara a intrincados dilemas, induzidos, é claro, pela ausência do conhecimento do infinitesimal. Outros paradoxos clássicos, como, por exemplo, o da “Tartaruga e a Lebre”, exemplificam que a negligência da noção de limite e do infinitesimal sempre nos levou a situações absurdas e incoerentes. Os trabalhos de Arquimedes foram abundantemente explorados e exerceram um papel fundamental de inspiração para os trabalhos científicos nos séculos XVI e XVII. Vários trabalhos desta época apresentam diversos métodos utilizados para resolver problemas geométricos, dentre eles métodos empíricos que faziam uso de argumentações envolvendo infinitésimos. Neste período, o “método de exaustão” de Eudoxo (409-355 a.C.) foi amplamente utilizado em demonstrações de fórmulas para áreas e volumes envolvendo curvas e superfícies. Fazemos em nosso trabalho um relato histórico-matemático da abordagem alternativa na estrutura das demonstrações matemáticas proposta pelos astrônomos Joahnnes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642, já trazendo o uso dos indivisíveis, mesmo que, ainda, na sua forma ingênua e puramente geométrica. Passamos pelo aprimoramento intuitivo dado aos indivisíveis por Bonaventura Cavalieri (1598-1647), e como Wallis apoia-se em tudo isso para estabelecer uma visão pioneira e aritmetizada a essa teoria dos indivisíveis e infinitesimais. Finalizamos com os reflexos e marcante obra de Wallis, *Arithmetica infinitorum*, no surgimento do conceito de limite (ainda no séc. XVII), e consequentemente do Cálculo e da Análise Matemática.

Palavras-chave: John Wallis; *Arithmetica infinitorum;* Infinitesimal.

ISSN: 2236 - 4102

Introdução

Primeiramente é necessário apontar que o real interesse de nosso trabalho é discutir a obra e o impacto do inglês John Wallis (1616-1703) na apresentação do Cálculo e da Análise Matemática como teorias importantes da matemática moderna. Discutir em que contexto surge sua obra prima *Arithmetica infinitorum*, de 1656, e a sua enorme influência sobre o desenvolver da matemática da segunda metade do século XVII, não só para os ingleses como para comunidade matemática em geral.

Apresentaremos um relato histórico-matemático da abordagem alternativa na estrutura das demonstrações matemáticas proposta pelos astrônomos Joahnnes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642); e o que isso provocou na forma de pensar a matemática àquela época. De acordo com Baron (1985, vol. 2, p. 11), até as demonstrações de Kepler, no cálculo de áreas e volumes, e de Galileu, nos princípios da cinemática, já trazendo o uso dos indivisíveis (ainda na sua forma geométrica), as técnicas eram fortemente baseadas na estrutura clássica introduzida por Arquimedes (287–212 a.C.). Passaremos pelo aprimoramento geométrico (mesmo que ingênuo, veja Baron (1985, vol. 2, p. 12)) dado aos indivisíveis por Bonaventura Cavalieri (1598-1647), e como Wallis apóia-se em tudo isso, além dos avanços apresentados por Giles Persone de Roberval (1602-1675) para dar uma nova roupagem aritmetizada a essa teoria dos indivisíveis e infinitesimais.

Finalizamos com os reflexos da mencionada anteriormente e marcante obra de Wallis, *Arithmetica infinitorum*, no surgimento do conceito de limite (ainda no séc. XVII), e consequentemente do cálculo e da análise matemática.

A contribuição de grandes nomes que antecederam Wallis

Um caminho tradicional de apresentar este tema nos remete aos gregos, aos primeiros filósofos jônicos representados aqui por Demócrito (460-370 a. C.), que buscavam fundamentos para a ciência. Desenvolveram a “doutrina do atomismo físico”, para o campo da geometria. É, por exemplo, creditado a Demócrito, por Plutarco (45-120) o seguinte dilema, extraído de Baron (1985, vol. 1, p. 20) :

> Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base, [plano bem próximo à base], o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são

ISSN: 2236 - 4102

> iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornaram o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser construído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo.

Uma interpretação dada a esse dilema indica que a noção de sólido, admitido por Demócrito, era de um sólido composto de seções planas paralelas à base. Ou seja, esse dilema induz o pensamento matemático a despeito da natureza do "infinitesimal". No trecho do texto acima "se cortarmos um cone por um plano paralelo à base [plano bem próximo à base] ..." tem embutido, como pano de fundo, o conceito de infinitesimal. Porque não é somente fazer recortes paralelos no cone, mas sim recortes paralelos com distâncias infinitesimais entre si (para simplicidade da situação são tomados os cortes próximos ao plano de apoio do cone). O raciocínio de Demócrito é colocado como dilema, pois, de maneira simplista, quando é abandonada a noção de proximidade infinitesimal entre as seções, veja o trecho "Elas são iguais ou diferentes?", é como se o cone fosse composto de degraus de alturas não infinitesimais, como uma "Torre de Hanói". Esse tipo de paradoxo é até esperado pela falta de amadurecimento, próprio da época, da ideia de distâncias infinitamente pequenas entre as seções. Mas já há neste dilema fortes indícios de que ao desconsiderar o infinitesimal somos levados a situações absurdas, como na passagem "mas se elas são iguais (as superfícies que formam as seções), as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser construído por círculos iguais". Outros paradoxos clássicos, como, por exemplo, o da "Tartaruga e a Lebre", exemplificam que o abandono da continuidade e completude dos reais, decodificada pela noção do infinitesimal sempre nos levou a situações absurdas e incoerentes.

O "método de exaustão" (termo estabelecido no século XVII), atribuído a Eudoxo (409-355 a.C.), foi amplamente utilizado em demonstrações de fórmulas para áreas e volumes envolvendo curvas e superfícies. O procedimento envolvia um raciocínio por redução ao absurdo: "Quando se supunha um valor diferente daquele conjecturado para a área ou volume em consideração, bastava apresentar um polígono com número suficientemente grande de lados para gerar uma contradição." O método de exaustão encontrou terreno fértil nas ideias de Arquimedes, mas em suas obras é percebida uma multiplicidade de métodos utilizados para resolver problemas geométricos dentre eles métodos empíricos que faziam uso de argumentações envolvendo infinitésimos. Os trabalhos de Arquimedes, já traduzidos para o latim, foram fontes abundantemente exploradas e exerceram um papel fundamental de inspiração para os trabalhos científicos nos séculos XVI e XVII.

Durante o Século XVII matemáticos italianos, franceses ingleses e dos Países Baixos se encantaram com os problemas associados a áreas, volumes e comprimento de arcos. Em meio as discussões sobre os métodos empregados nas demonstrações de geometria clássica, novos métodos foram surgindo impulsionados pela corrente que trazia o uso do simbolismo algébrico introduzido por François Viète (1540-1603) no século XVI. Os problemas antigos eram, então, atacados usando-se novos métodos, ora estendidos ou generalizados e novos problemas foram colocados.

Os astrônomos Joahnnes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) foram os primeiros a modificar, de forma marcante, a maneira de fazer uma demonstração matemática, sem usar as técnicas clássicas propostas nos trabalhos de Arquimedes.

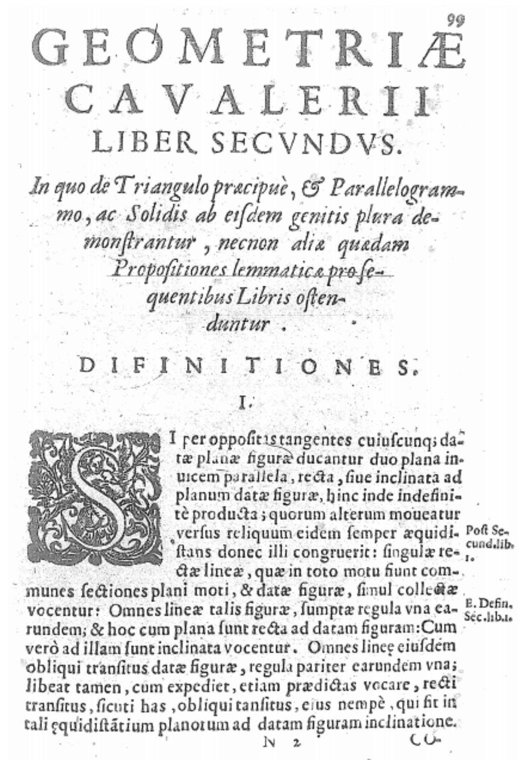
Até as demonstrações matemáticas nos trabalhos do holandês Kepler, o cálculo de áreas e volumes de diversos sólidos e superfícies não traziam o uso dos indivisíveis. Pela primeira vez era percebido de maneira significativa um pensamento, mesmo que ainda ingênuo, de infinito. Ele considerava que sólidos e superfícies eram formas compostas de repetições "infinitas" de retas e planos. Comparou seus métodos com os utilizados por Arquimedes, ampliando significativamente o número de sólidos tratados, considerando, por exemplo, os sólidos de revolução que não foram abordados nos cálculos de volumes de Arquimedes. Segundo Boyer (1996, p. 224) o seu método de calcular volumes consistia em considerar os sólidos como compostos de uma "infinidade" de elementos infinitesimais. Desencadeou, assim, uma série de estudos sobre indivisíveis e infinitesimais. Sua obra *Doliometria*, de 1615, reunia suas principais ideias sobre estes temas. Ideias estas que, posteriormente, estimularam os trabalhos de Cavalieri, que abordaremos um pouco mais adiante, mas não antes de apresentar as contribuições de Galileu Galilei.

Em seus estudos na cinemática, o italiano Galileu Galilei além de apresentar novas curvas e formas geométricas oriundas do movimento, deu uma grande contribuição nesta abordagem inicial dos infinitesimais. O infinitamente pequeno era extremamente importante para Galileu, pois era, para ele, essencial para a dinâmica do movimento. O mesmo já não acontecia com o infinitamente grande. Assim, como destacamos uma importante obra de Kepler, neste contexto, um marcante trabalho de Galileu é o *Duas Novas Ciências*, de 1638, onde Galileu apresenta, de maneira ainda bastante intuitiva e

ISSN: 2236 - 4102

ingênua, o infinitamente pequeno. Por exemplo, ao considerar que é tão fácil decompor um segmento de reta em um número infinito de partes quanto dividi-lo em números finitos de partes, veja Boyer (1996, p. 225). Esta abordagem intuitiva, especulativa e fantasiosa, não é, segundo Roque (2012, p. 304), um fato sem explicação, vindo dos desenvolvimentos teóricos de Galileu que se basearam no conhecimento de artesãos, arquitetos e engenheiros do século XVI.

O também italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicou em 1635 sua principal obra, *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova*, em que dá continuidade aos argumentos sugeridos por Kepler e Galileu acerca dos problemas de áreas e volumes, utilizando as idéias do infinitamente pequeno. A primeira definição no livro II (figura 1) introduz o conceito de "todas as linhas" *(omnes linea)*, este conceito é muito importante na teoria para figuras planas de Cavalieri e diz respeito aos indivisíveis.


99

GEOMETRIÆ CAVALERII
LIBER SECVNDVS.

In quo de Triangulo præcipuè, & Parallelogrammo, ac Solidis ab eisdem genitis plura demonstrantur, necnon aliæ quædam Propositiones lemmaticæ prosequentibus Libris ostenduntur.

DIFINITIONES.

I.

SI per oppositas tangentes cuiuscunq; datæ planæ figuræ ducantur duo plana inuicem parallela, recta, siue inclinata ad planum datæ figuræ, hinc inde indefinitè producta; quorum alterum moueatur versus reliquum eidem semper æquidistans donec illi congruerit: singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes sectiones plani moti, & datæ figuræ, simul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, sumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana sunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam sunt inclinata vocentur. Omnes lineę eiusdem obliqui transitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; libeat tamen, cum expediet, etiam prædictas vocare, recti transitus, sicuti has, obliqui tansitus, eius nempè, qui fit in tali ęquidistãtium planorum ad datam figuram inclinatione.

Post Secund.lib. 1.
E. Defin. Sec.lib.1.

N 2 CO-

Figura 1: Definição I do livro II de *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova.*

De acordo com Andersen (1985, p. 321), esta obra foi escrita com a intenção de criar um novo método de quadraturas e cubaturas, ele não estava interessado em apenas encontrar novos resultados, mas também em mostrar a sua maneira de trabalhar e ele fez isso usando o seu método para obter teoremas já conhecidos.

Neste trabalho Cavalieri também parte do pressuposto que um sólido pode ser formado de regiões que têm volumes infinitamente pequenos. Os pensamentos usados por ele têm raízes naqueles apresentados nos trabalhos de Arquimedes e Demócrito, mas diferindo fundamentalmente na maneira de demonstrar os resultados. Boyer (1996, p. 226) e Eves (2004, p. 425) destacam este aspecto. Entretanto, Arquimedes e Demócrito se utilizaram de argumentos puramente geométricos. A teoria de Cavalieri permitia a determinação rápida de áreas e volumes de figuras geométricas.

ISSN: 2236 - 4102

Na sua obra intitulada *De Dimensione Parabolae*, Evangelista Torricelli (1608-1647) revelou a clareza e a simplicidade na abordagem dos problemas por infinitésimos, mas tinha perfeita percepção da ausência de rigor causada pelo uso de tal procedimento. A sutileza de Torricelli em suas demonstrações contribuiu muito para o trabalho de todos os matemáticos no que diz respeito à arte da demonstração.

Arithmetica Infinitorum de Wallis

Os métodos infinitesimais foram amplamente divulgados nas pesquisas e trabalhos simultâneos de vários matemáticos durante os séculos, XVI e XVII. Isso mostra o caráter amplo e a importância atribuída a tais métodos. Diversos problemas, dentre eles citamos os de quadratura, cubatura, retificação de arcos, problemas de máximos e mínimos alavancaram o uso dos infinitésimos e contribuíram para explicitar uma tensão entre geometria de um lado e aritmética e álgebra de outro. Tensão, essa, sensivelmente percebida na obra mais relevante de Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, publicada na segunda metade do século XVII em 1655. O conteúdo e os métodos do livro exercem um papel importante na transição do pensamento geométrico ao pensamento algébrico e influenciou vários matemáticos da segunda metade do século XVII.

William Oughtred (1574-1660) foi professor de Wallis e provavelmente apresentou ao seu aluno as ideias de Cavalieri sobre os indivisíveis. Em seu trabalho Cavalieri havia considerado figuras planas como sendo geradas por um número infinito de linhas paralelas, os indivisíveis, e edificou uma teoria que mostrou como áreas podem ser obtidas utilizando as suas respectivas coleções de linhas. Wallis, entretanto, mergulhou a fundo em outra obra, a *Opera geometrica* de Torricelli (1608-1647), que tratou de forma simplificada a teoria de Cavalieri. Stedal (2001) destaca que podemos considerar que a inspiração de Wallis para escrever seu livro *Arithmetica Infinitorum* foi a teoria dos indivisíveis de Cavalieri interpretadas por Torricelli.

Wallis acolheu as vantagens advindas da geometria analítica de Descartes (1596-1650) e foi dentre os seus contemporâneos o que exibiu nos seus trabalhos uma aritmética livre de exposições geométricas. Ele mostrou como problemas clássicos de quadratura podem ser manipulados aritmeticamente e algebricamente e essa transição de geometria

XI SNHM
Sociedade Brasileira de História da Matemática - SBHMat
XI Seminário Nacional de História da Matemática
ISSN: 2236 - 4102

para aritmética e o cerne do método de Wallis. A geometria dos indivisíveis de Cavalieri torna-se então na aritmética do infinito de Wallis.

Ele começa a sua obra de forma discreta, logo na primeira proposição (figura 2) ele testa poucas razões simples:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

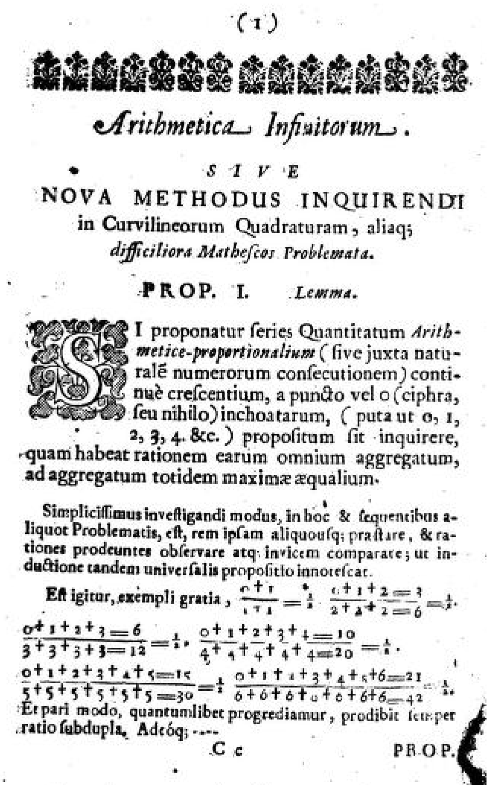
$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6}{6+6+6+6+6+6+6}=\frac{21}{42}=\frac{1}{2}$$

Percebemos que a prova de Wallis consistia em uma indução, não como a que conhecemos hoje em dia, mas uma indução que chamaremos de "indução ingênua", pois ele calculou as razões para valores inteiros pequenos e ousou em concluir que $\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n(n+1)}=\frac{1}{2}, \quad n \in Z.$


(1)

Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Mathefcos Problemata.

PROP. I. Lemma.

SI proponatur feries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (five juxta naturalẽ numerorum confecutionem) continuè crefcentium, a puncto vel o (ciphra, feu nihilo) inchoatarum, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4. &c.) propofitum fit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciffimus inveftigandi modus, in hoc & fequentibus aliquot Problematis, eft, rem ipfam aliquoufq; praftare, & rationes prodeuntes obfervare atq; invicem comparare; ut inductione tandem univerfalis propofitio innotefcat.

Eft igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$.
$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$.
$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$.
Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit femper ratio fubdupla. Adeóq; ---

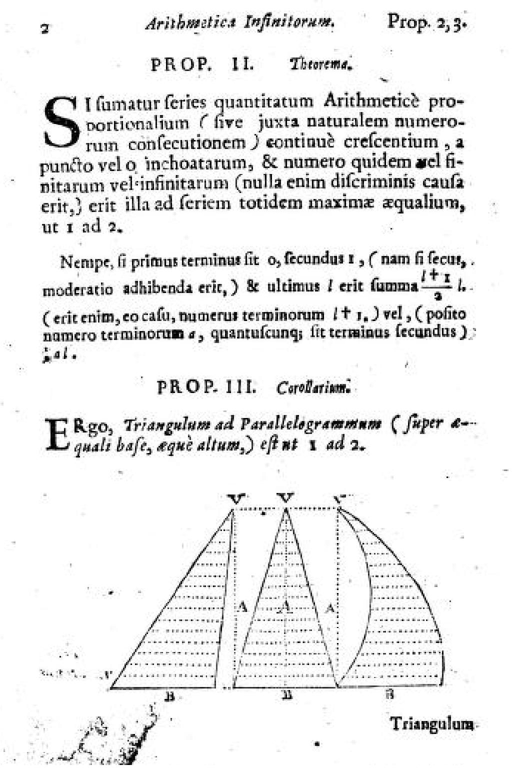
Cc PROP.

Figura 2: Proposição I do livro *Arithmetica Infinitorum*

Na proposição II, ele apresenta (figura 3) a fórmula $\frac{l+1}{2}l$ para a soma dos inteiros de 0 a l como derivada da Proposição I . O resultado não era novo, mas aparece impresso pela primeira vez, não apenas como declarado, mas como um resultado derivado de outro, veja Stedal, (2001).

Em suas publicações os matemáticos, até então, ocultavam os seus métodos de descobertas. Entretanto, Wallis, com esse procedimento, deixa pistas do seu pensamento e métodos de investigação para alcançar o resultado e essa é uma atitude tomada por ele ao longo desta obra.

ISSN: 2236 - 4102


2 *Arithmetica Infinitorum.* Prop. 2, 3.

PROP. II. *Theorema.*

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel 0 inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit 0, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l erit ſumma $\frac{l+1}{2} l$. (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (poſito numero terminorum a, quantuſcunq; ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2} a l$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æquè altum,) eſt ut* 1 *ad* 2.

Figura 3: Proposições II e III do livro *Arithmetica Infinitorum*

A proposição III versa sobre a proporção da área de um triângulo e um paralelogramo que possuem mesma base e altura. Para a prova ele usa um argumento ao longo das linhas, ele começa dizendo que um triângulo consiste de um número infinito de linhas paralelas em proporção aritmética, sendo a mais longa a da base; e que o paralelogramo consiste do mesmo número de linhas (fig. 3) com mesma base, portanto a área do triângulo é a metade da área do paralelogramo. Percebemos aqui a influencia de “todas as linhas” *(omnes linea) de* Cavalieri. A inovação do método de Wallis consistiu em dar um tratamento aritmético a resultados geométricos.

De acordo com Stedal, (2001), na proposição III o argumento aritmético vem das proposições I e II, vejamos como ele fez isso: Para chegar a proporção entre a área do triângulo e a área do paralelogramo que possuem as mesmas base e altura, ele começa comparando as áreas com a soma das linhas paralelas de cada figura, mas a soma das linhas paralelas do triângulo é comparável a soma das linhas paralelas do paralelogramo (em um mesmo número de vezes). Contudo, as linhas paralelas do paralelogramo têm o mesmo tamanho que a linha da base do triângulo, assim como a soma de uma progressão aritmética é comparável a soma de uma mesma quantidade de vezes do maior termo dessa progressão, $\frac{0+1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+n+\ldots+n}=\frac{1}{2}$. Portanto, a área do triângulo está em igual proporção à área do paralelogramo: $\frac{1}{2}$.

No *Arithmetica infinitorum* aparece pela primeira vez uma forma aceitável para explicar o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários da fórmula atualmente

ISSN: 2236 - 4102

escrita como $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. A proposição 132 é derivada desta fórmula para potências fracionárias e é um de seus resultados mais marcantes, a fração infinita para $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}{2.4.4.6.6.8.8.10.10\ldots}$$

Nos anos seguintes da publicação de *Arithmetica infinitorum* em 1655 novos resultados sobre quadratura, retificação e séries infinitas começaram a proliferar, a maioria deles iluminados pela obra de Wallis. *Arithmetica infinitorum* teve uma nova impressão em 1695 dada a sua grande exposição. A obra de Wallis foi de grande importância para Isaac Newton, que teve a oportunidade de começar onde ele terminou e conseguir a quadratura do círculo na forma de uma série infinita.

Considerações finais

Wallis, que estudou trabalhos de Kepler, Cavalieri, Roberval, Torricelli e Descartes, apresentou suas ideias em obras que contribuiram de forma expressiva para as origens do cálculo. Na sua obra *Aritmetica infinitorum* ele desenvolveu métodos inovadores de demonstrações que se apoiavam no estilo analítico de Descartes e introduziu novas técnicas que utilizavam a abordagem aritmética. Nossa pesquisa é centralizada nesta influente obra de Wallis, onde é percebido uma múltipla utilização de representações em suas investigações, tais como tabelas e sequências numéricas, que foram confirmadas com argumentos geometricos e algébricos.

Bibliografia

ANDERSEN, K. “**Cavalieri´s Method of Indivisibles”.** Archive for History of Exact Sciences 31. 1985, 291-367.

BARON, M. E. **Curso de História da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo**, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Volume 1. 63 p.

BARON, M. E. **Curso de História da matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo**, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Volume 2. 37 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996. 496 p.

CAVALIERI, B. **Geometria Indivisilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota**, Bolonha, reprinted 1653.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004. 844 p.

MALET, A. **From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities. (Enrahonar. Monografies : 6).** Universitat Autonoma de Barcelona, Bellaterra, 1996. 163 p.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.** Rio de Janeiro, Zahar, 2012. 511 p.

STEDAL J. A. **The Discory of Wanders: Reading Between the Lines of John Wallis´s Arithmetica infinitorum.** Arch. Hist. Exact. Sci. 56, 2001, 1-28. (Springer-Verlag)

STEDAL J. A. **The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656. (Arithmetica Infinitorum: John Wallis 1656 - Transleted from Latin to English with an introduction).** New York, Springer-Verlag, 2004. 192 p.

WALLIS, J. **Arithmetica Infinitorum.** Oxford, 1656.